

周辺を数個の点で固定された周辺支持円板の振動解析

原田 善勝* 小寺 忠**

Vibration Analysis of a Thin Circular Plate with Several Clamped Points

Yoshikatsu HARADA and Tadashi KOTERA

(Received February 26, 2001)

The natural frequencies and the mode shapes of a simply supported thin circular plate with several clamped points are determined by two methods. A partial differential equation is solved using Fourier series of Dirac's delta function first, and then a partial integro-differential equation is solved using eigenfunctions and eigenfrequencies of a simply supported thin circular plate.

If the bending moments at the clamped points for free vibration are considered as harmonically excitation moments with unknown amplitudes, a periodic solution of forced vibration of a simply supported thin circular plate is obtained. Using the constraint conditions that the slopes of deflection must be zero at the clamped points, simultaneous equations with respect to the unknown amplitudes of moments are obtained.

The frequency equation is obtained from a necessary and sufficient condition for existence of the non-trivial solutions.

Key Words: Eigenfrequency Analysis, Modal Analysis, Free Vibration, Influence Function, Integral Equation

1. まえがき

鉄道車輪や丸鋸の騒音防止のために中央部分固定、外周自由、一点で支持という円板の回転状態の振動解析が1970年代後半から盛んに行われてきた。^{[1]–[5]}

その後、情報機器が振動する環境で使用されるようになり、フロッピー・ディスクの力学モデルとして、やはり中央部分固定、外周自由、一点支持の回転円板の振動解析がますます盛んに行なわれて来た。^{[6]–[19]}

一方では、これらとは直接には関係なく、いくつ

かの点で支持された円板の固有振動数解析も行なわれてきている。^{[20]–[23]}

文献[2], [22]を除くいずれの論文も、周辺自由の円板の運動方程式を偏微分方程式で表現し、一般解を導いている。すなわち、支点反力を未知の集中調和外力に置き換え、それをフーリエ級数で表して強制振動の解を求め、その後、支点の変位が常に0という拘束条件を用いて連立代数方程式を導いている。その代数方程式が非自明解をもつ必要十分条件から振動数方程式を誘導し、固有振動数と固有振動モードを求めている。

これに対して、久松らは、グリーン関数の概念を用いて中央固定、周辺自由および周辺1点支持の円板の解析を行い^[2]、山田らは、久松らと同様の手法で、支点の位置、個数、支持条件に無関係な解法を示している^[22]。いずれも巧みな方法である。

その後、1995年の兵庫県南部地震による機械や構造物の被害調査を契機として、ボルトで締められた構造物の振動解析が再び注目されるようになってき

* 工学研究科機械工学専攻

** 機械工学科

* Mechanical Engineering Course, Graduate School of Engineering

** Dept. of Mechanical Engineering

ている。特に円筒状構造物に円板がボルトで締め付けられている様な場合、それを簡単にモデル化すると周辺多点固定の周辺支持円板になる。これについては集中力をフーリエ級数に展開し、有限要素法で解いている木村らの研究が見られる程度で^[24]、十分に解析されているとは言えない。そこで、本報では周辺を数点で固定された周辺支持円板の固有振動数と正規固有関数を、次の2通りの方法で求めている。

第1の方法：周辺支持という境界条件は、変位が0、曲げモーメントが0という式で表され、固定点では、これに未知の集中曲げモーメントが付加される。よって、曲げモーメントの条件式にディラックのデルタ関数が含まれるので、それをフーリエ級数に展開して振動数方程式を誘導する方法。

第2の方法：比較的簡単に求められる周辺支持円板の固有振動数と正規直交固有関数(完全系)を用いて、周辺数点固定の周辺支持円板の固有振動数と正規固有関数を求める計算方法。

2. 第1の方法

いま、ヤング率 E 、ポアソン比が ν 、密度が ρ 、厚さが h 、半径が a の円板があるとすれば、その非回転状態での運動方程式は、極座標で

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^4 \nabla^4 u = f \quad (1)$$

のように表される。ただし、 u は円板に垂直方向の変位、 r は半径方向の距離、 θ は円板に固定された座標系での角度、そして

$$c^4 = \frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}$$

$$\nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2$$

である。 f は外力である。

固有振動数や固有関数を求める場合は、 $f=0$ とし、解を次式のように置くことができる。

$$u(t, r, \theta) = U(r, \theta) \cos \omega t$$

$$= \begin{cases} R(r) \cos n\theta \cos \omega t \\ R(r) \sin n\theta \cos \omega t \end{cases} \quad (2)$$

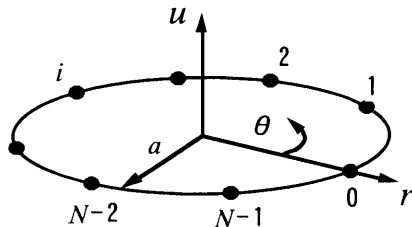


図1 周辺を数点で固定された周辺支持円板

すると R の一般解は

$$R_n(z) = A_n J_n(z) + B_n N_n(z) + C_n I_n(z) + D_n K_n(z) \quad (3)$$

となる。ここに

$$\frac{r}{c} \sqrt{\omega} = z \quad (4)$$

$J_n(z)$ は第 n 次第1種円柱関数(狭義の Bessel 関数)、 $N_n(z)$ は第 n 次第2種円柱関数(Neumann 関数)、 $I_n(z)$ は第 n 次第1種変形 Bessel 関数、そして $K_n(z)$ は第 n 次第2種変形 Bessel 関数である。

すると、式(2)の $U(r, \theta)$ の一般解は

$$U_n(r, \theta) = \cos n\theta \{ A_n J_n(z) + B_n N_n(z) + C_n I_n(z) + D_n K_n(z) \} + \sin n\theta \{ A'_n J_n(z) + B'_n N_n(z) + C'_n I_n(z) + D'_n K_n(z) \} \quad (5)$$

としなければならない。係数 A_n, B_n, C_n, D_n および ω などは境界条件によって定められる。

まず、 $z=0$ のとき $N_n(0) = K_n(0) = \infty$ となるので、境界が外周だけの場合、 $z=0$ で変位が有限であるためには $B_n = D_n = B'_n = D'_n = 0$ としなければならない。よってこれ以降は

$$U_n(r, \theta) = \cos n\theta \{ A_n J_n(z) + C_n I_n(z) \} + \sin n\theta \{ A'_n J_n(z) + C'_n I_n(z) \} \quad (6)$$

とおく。

いま考えている周辺支持円板の場合、 $r=a$ で変位が0ということより、

$$u(t, r, \theta) = 0 \quad (7)$$

これが t, θ に無関係に成立するためには

$$R_n(\lambda) = 0 \quad (8)$$

となる。ただし、

$$\frac{a}{c} \sqrt{\omega} = \lambda \quad (9)$$

R_n' についても同様の式が成立しなければならない。これらより

$$A_n J_n(\lambda) + C_n I_n(\lambda) = 0 \quad (10)$$

$$A'_n J_n(\lambda) + C'_n I_n(\lambda) = 0 \quad (11)$$

が得られる。

また、周辺の数点で固定されているので、固有振動の状態では、固定点には接線軸まわりの周期的な集中曲げモーメントが作用する。従ってそれはデルタ関数で表現される。

仮に $\theta=0$ にのみ固定点があって、その曲げモーメントを $M \cos \omega t$ とすると、 $r=a$ でのモーメントの分布は δ 関数をフーリエ級数で展開することにより

$$M \cos \omega t \frac{\delta(\theta)}{a} = M \cos \omega t \frac{1}{2\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \cos n\theta \quad (12)$$

となる. ただし, $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_n = 2$ ($n \geq 1$) (付録参照).
これと曲げモーメントのつりあいにより,

$$\begin{aligned} & -D \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \right\} \Big|_{r=a} \\ & = M \cos \omega t \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\theta \end{aligned} \quad (13)$$

が得られる.

固定点が, 円周を N 等分した $\theta = i2\pi/N$ ($i = 0, 1, \dots, N-1$) にあるとすれば, 式(13)は次のように書ける.

$$\begin{aligned} & -D \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \right\} \Big|_{r=a} \\ & = \sum_{i=0}^{N-1} M_i \cos \omega t \\ & \quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left(\cos n \frac{2\pi i}{N} \cos n\theta + \sin n \frac{2\pi i}{N} \sin n\theta \right) \end{aligned} \quad (14)$$

この右辺は n についての総和であるので, 右辺の u も n についての総和にしなければならず, 解 u を

$$u(t, r, \theta) = \cos \omega t \sum_{n=0}^{\infty} U_n(r, \theta) \quad (15)$$

のように置く.

式(14)が時間 t に無関係に成立しなければならないので, 式(14)を次のように変形する. 定義式(4)(9)を参考にすると

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^2 U_n}{\partial z^2} + \nu \left(\frac{1}{z} \frac{\partial U_n}{\partial z} + \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2 U_n}{\partial \theta^2} \right) \right\} \Big|_{z=\lambda} \\ & = -\frac{c^2}{D\omega} \sum_{i=0}^{N-1} M_i \frac{1}{2\pi a} \\ & \quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left(\cos n \frac{2\pi i}{N} \cos n\theta + \sin n \frac{2\pi i}{N} \sin n\theta \right) \end{aligned} \quad (16)$$

のようになる. 以後 $-\frac{c^2}{D\omega} M_i \frac{1}{2\pi a}$ を改めて M_i と書き直すことにすると,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^2 U_n}{\partial z^2} + \nu \left(\frac{1}{z} \frac{\partial U_n}{\partial z} + \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2 U_n}{\partial \theta^2} \right) \right\} \Big|_{z=\lambda} \\ & = \sum_{i=0}^{N-1} M_i \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \\ & \quad \times \left(\cos n \frac{2\pi i}{N} \cos n\theta + \sin n \frac{2\pi i}{N} \sin n\theta \right) \end{aligned} \quad (17)$$

$n=0$ の成分が時間 t に無関係に成立するためには

$$\begin{aligned} & A_0 \left\{ -\lambda^2 J_0(\lambda) + (1-\nu) \lambda J_1(\lambda) \right\} \\ & + C_0 \left\{ \lambda^2 I_0(\lambda) - (1-\nu) \lambda I_1(\lambda) \right\} = \lambda^2 \sum_{i=0}^{N-1} M_i \end{aligned} \quad (18)$$

$\cos n\theta$ の成分が時間 t に無関係に成立するためには

$$\begin{aligned} & A_n \left\{ -\lambda^2 J_n(\lambda) + (1-\nu) \{n(n-1)J_n(\lambda) + \lambda J_{n+1}(\lambda)\} \right\} \\ & + C_n \left\{ -\lambda^2 I_n(\lambda) + (1-\nu) \{n(n-1)I_n(\lambda) + \lambda I_{n+1}(\lambda)\} \right\} \\ & = 2\lambda^2 \sum_{i=0}^{N-1} M_i \cos n \frac{2\pi i}{N} \end{aligned} \quad (19)$$

$\sin n\theta$ の成分が時間 t に無関係に成立するためには

$$\begin{aligned} & A'_n \left\{ -\lambda^2 J_n(\lambda) + (1-\nu) \{n(n-1)J_n(\lambda) + \lambda J_{n+1}(\lambda)\} \right\} \\ & + C'_n \left\{ -\lambda^2 I_n(\lambda) + (1-\nu) \{n(n-1)I_n(\lambda) + \lambda I_{n+1}(\lambda)\} \right\} \\ & = 2\lambda^2 \sum_{i=0}^{N-1} M_i \sin n \frac{2\pi i}{N} \end{aligned} \quad (20)$$

でなければならない.

以上の式(10)(11)(18)(19)および(20)より係数 A_n 等を M_i を用いて表すことができ, 解(15)を求めることができる. ただしまだ未知数 M_i を含んだままである.

ところで, 固定点では半径方向の傾きが 0 でなければならないので,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 ; \theta = \frac{2\pi i}{N}, r = a \quad (21)$$

これより次式が得られる.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle A_n \left\{ \frac{n}{\lambda} J_n(\lambda) - J_{n+1}(\lambda) \right\} \right. \\ & \quad + C_n \left\{ \frac{n}{\lambda} I_n(\lambda) - I_{n+1}(\lambda) \right\} \Bigg\rangle \cos n \frac{2\pi i}{N} \\ & + \left[A'_n \left\{ \frac{n}{\lambda} J_n(\lambda) - J_{n+1}(\lambda) \right\} \right. \\ & \quad + C'_n \left\{ \frac{n}{\lambda} I_n(\lambda) - I_{n+1}(\lambda) \right\} \Bigg] \sin n \frac{2\pi i}{N} = 0 \\ & \quad (i = 0, 1, \dots, N-1) \end{aligned} \quad (22)$$

式(10)(11)(18)~(20)より求まる A_n, C_n 等を式(22)に代入することにより, 未知数 M_i に関する合計 N 個の連立方程式が得られる. それらが非自明解をもつための必要十分条件から λ が決定される.

まず, $n=0$ については

$$A_0 J_0(\lambda) + C_0 I_0(\lambda) = 0 \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & A_0 \left\{ -\lambda^2 J_0(\lambda) + (1-\nu) \lambda J_1(\lambda) \right\} \\ & + C_0 \left\{ \lambda^2 I_0(\lambda) - (1-\nu) \lambda I_1(\lambda) \right\} = \lambda^2 \sum_{i=0}^{N-1} M_i \end{aligned} \quad (24)$$

これより,

$$A_0 = \lambda^2 a_0 \sum_{i=0}^{N-1} M_i, \quad C_0 = \lambda^2 c_0 \sum_{i=0}^{N-1} M_i$$

とおく. ここで a_0, c_0 は次のようになる.

$$a_0 = -\frac{I_0(\lambda)}{\Delta}, \quad c_0 = \frac{J_0(\lambda)}{\Delta}$$

$$\Delta = J_0(\lambda) \left\{ \lambda^2 I_0(\lambda) - (1-\nu) \lambda I_1(\lambda) \right\} - I_0(\lambda) \left\{ -\lambda^2 J_0(\lambda) + (1-\nu) \lambda J_1(\lambda) \right\}$$

次に, $n \geq 1$ については

$$A_n J_n(\lambda) + C_n I_n(\lambda) = 0 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & A_n \left[-\lambda^2 J_n(\lambda) + (1-\nu) \{n(n-1)J_n(\lambda) + \lambda J_{n+1}(\lambda)\} \right] \\ & + C_n \left[-\lambda^2 I_n(\lambda) + (1-\nu) \{n(n-1)I_n(\lambda) + \lambda I_{n+1}(\lambda)\} \right] \\ & = 2\lambda^2 \sum_{i=0}^{N-1} M_i \cos n \frac{2\pi i}{N} \end{aligned} \quad (26)$$

これより

$$A_n = \lambda^2 a_n \sum_{i=0}^{N-1} M_i \cos n \frac{2\pi i}{N}$$

$$C_n = \lambda^2 c_n \sum_{i=0}^{N-1} M_i \cos n \frac{2\pi i}{N}$$

ここに

$$a_n = -\frac{2I_n(\lambda)}{\Delta}, \quad c_n = \frac{2J_n(\lambda)}{\Delta}$$

$$\begin{aligned} \Delta = & J_n(\lambda) \left[\lambda^2 I_n(\lambda) + (1-\nu) \right. \\ & \times \{n(n-1)I_n(\lambda) - \lambda I_{n+1}(\lambda)\} \\ & - I_n(\lambda) \left[-\lambda^2 J_n(\lambda) + (1-\nu) \right. \\ & \times \{n(n-1)J_n(\lambda) + \lambda J_{n+1}(\lambda)\} \end{aligned}$$

同様に

$$A'_n J_n(\lambda) + C'_n I_n(\lambda) = 0 \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & A'_n \left[-\lambda^2 J_n(\lambda) + (1-\nu) \{n(n-1)J_n(\lambda) + \lambda J_{n+1}(\lambda)\} \right] \\ & + C'_n \left[-\lambda^2 I_n(\lambda) + (1-\nu) \{n(n-1)I_n(\lambda) + \lambda I_{n+1}(\lambda)\} \right] \\ & = 2\lambda^2 \sum_{i=0}^{N-1} M_i \sin n \frac{2\pi i}{N} \end{aligned} \quad (28)$$

$$A'_n = \lambda^2 a'_n \sum_{i=0}^{N-1} M_i \sin n \frac{2\pi i}{N}$$

$$C'_n = \lambda^2 c'_n \sum_{i=0}^{N-1} M_i \sin n \frac{2\pi i}{N}$$

ここに a'_n, c'_n は上の a_n, c_n と同じ。

以上より、式(22)は

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[a_n \left\{ \frac{n}{\lambda} J_n(\lambda) - J_{n+1}(\lambda) \right\} \right. \right. \\ & + c_n \left\{ \frac{n}{\lambda} I_n(\lambda) + I_{n+1}(\lambda) \right\} \left. \right] \cos n \frac{2\pi j}{N} \sum_{i=0}^{N-1} M_i \cos n \frac{2\pi i}{N} \\ & + \left[a_n \left\{ \frac{n}{\lambda} J_n(\lambda) - J_{n+1}(\lambda) \right\} + c_n \left\{ \frac{n}{\lambda} I_n(\lambda) + I_{n+1}(\lambda) \right\} \right] \\ & \times \sin n \frac{2\pi j}{N} \sum_{i=0}^{N-1} M_i \sin n \frac{2\pi i}{N} \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\{-a_n J_{n+1}(\lambda) + c_n I_{n+1}(\lambda)\} \right. \\ & \times \cos n \frac{2\pi j}{N} \sum_{i=0}^{N-1} M_i \cos n \frac{2\pi i}{N} \\ & + \{-a_n J_{n+1}(\lambda) + c_n I_{n+1}(\lambda)\} \\ & \times \sin n \frac{2\pi j}{N} \sum_{i=0}^{N-1} M_i \sin n \frac{2\pi i}{N} \left. \right] = 0 \\ & (j = 0, 1, \dots, N-1) \end{aligned} \quad (29)$$

となる。和の順序を変更して

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{N-1} M_i \sum_{n=0}^{\infty} \left[\cos n \frac{2\pi j}{N} \cos n \frac{2\pi i}{N} \right. \\ & \times \{-a_n J_{n+1}(\lambda) + c_n I_{n+1}(\lambda)\} \\ & + \sin n \frac{2\pi j}{N} \sin n \frac{2\pi i}{N} \{-a_n J_{n+1}(\lambda) + c_n I_{n+1}(\lambda)\} \left. \right] \\ & = \sum_{i=0}^{N-1} M_i \sum_{n=0}^{\infty} \cos n \frac{2\pi(j-i)}{N} \{-a_n J_{n+1}(\lambda) + c_n I_{n+1}(\lambda)\} \\ & = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, N-1) \end{aligned} \quad (30)$$

のようにおき、さらに簡単のために、これを

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{N-1} M_i b_{ij} = 0 \\ & (j = 0, 1, \dots, N-1) \end{aligned} \quad (31)$$

とおけば、 M_i の存在条件より

$$\det(b_{ij}) = 0 \quad (32)$$

が得られる。ここに

$$b_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \cos n \frac{2\pi(j-i)}{N} \{-a_n J_{n+1}(\lambda) + c_n I_{n+1}(\lambda)\}$$

このように非常に複雑な過程を経て、複雑な振動数方程式が得られる。

3. 第2の方法

もっと簡単に振動数方程式を誘導するために、今度は式(1)の一般解を用いるやり方は採用しないで、別の形の運動方程式すなわち影響関数を用いた偏微分方程式を採用する。

円板の強制振動の運動方程式は一般に、境界条件がどうであれ、線形である限り次のように表現できる。

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t) = & \int_0^{2\pi} \int_0^a G(r, \theta; \xi, \zeta) \\ & \times \left\{ f(\xi, \zeta, t) - m(\xi, \zeta) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} \xi d\xi d\zeta \end{aligned} \quad (33)$$

ただし、積分の範囲は円板の全域であり、 $m(\xi, \zeta)$ は単位面積あたりの質量、 r, θ, ξ, ζ は位置を表す極座標、 $G(r, \theta; \xi, \zeta)$ は与えられた境界条件で決まる影響関数、 $f(\xi, \zeta, t)$ は外力である。

固定点がある場合、固定点では円板に垂直な集中力と半径軸まわりの集中曲げモーメント、および円板の接線軸まわりの集中曲げモーメントを受ける。一般に力 $f(r, \theta, t)$ 、半径軸まわりの曲げモーメント $M_r(r, \theta, t)$ 、接線軸まわりの曲げモーメント $M_\theta(r, \theta, t)$ が作用する円板 (図2参照) の場合、運動方程式は式(33)を拡張して、

$$\begin{aligned}
u(r, \theta, t) = & \int_0^{2\pi} \int_0^a G_{uf}(r, \theta; \xi, \zeta) \\
& \times \left\{ f(\xi, \zeta, t) - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} \xi d\xi d\zeta \\
& + \int_0^{2\pi} \int_0^a G_{ur}(r, \theta; \xi, \zeta) M_r(\xi, \zeta, t) \xi d\xi d\zeta \\
& + \int_0^{2\pi} \int_0^a G_{u\theta}(r, \theta; \xi, \zeta) M_\theta(\xi, \zeta, t) \xi d\xi d\zeta
\end{aligned} \quad (34)$$

のようになる。ただし、簡単のために回転慣性を無視している。ここに積分変数 ξ は r と同じく半径であり、積分変数 ζ は θ と同じく角度である。また、

$G_{uf}(r, \theta; \xi, \zeta)$ は、座標 (ξ, ζ) における力と (r, θ) における変位との間の影響関数、

$G_{ur}(r, \theta; \xi, \zeta)$ は、座標 (ξ, ζ) における半径軸まわりの曲げモーメントと (r, θ) における変位との間の影響関数、

$G_{u\theta}(r, \theta; \xi, \zeta)$ は、座標 (ξ, ζ) における円周接線軸まわりの曲げモーメントと (r, θ) における変位との間の影響関数である。

r 方向の傾き $u_r(r, \theta, t)$ と θ 方向の傾き $u_\theta(r, \theta, t)$ に関する運動方程式は、それぞれ式(34)を r, θ で偏微分して

$$\begin{aligned}
u_r(r, \theta, t) = & \int_0^{2\pi} \int_0^a G_{rf}(r, \theta; \xi, \zeta) \\
& \times \left\{ f(\xi, \zeta, t) - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} \xi d\xi d\zeta \\
& + \int_0^{2\pi} \int_0^a G_{rr}(r, \theta; \xi, \zeta) M_r(\xi, \zeta, t) \xi d\xi d\zeta \\
& + \int_0^{2\pi} \int_0^a G_{r\theta}(r, \theta; \xi, \zeta) M_\theta(\xi, \zeta, t) \xi d\xi d\zeta
\end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
u_\theta(r, \theta, t) = & \int_0^{2\pi} \int_0^a G_{\theta f}(r, \theta; \xi, \zeta) \\
& \times \left\{ f(\xi, \zeta, t) - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} \xi d\xi d\zeta \\
& + \int_0^{2\pi} \int_0^a G_{\theta r}(r, \theta; \xi, \zeta) M_r(\xi, \zeta, t) \xi d\xi d\zeta \\
& + \int_0^{2\pi} \int_0^a G_{\theta\theta}(r, \theta; \xi, \zeta) M_\theta(\xi, \zeta, t) \xi d\xi d\zeta
\end{aligned} \quad (36)$$

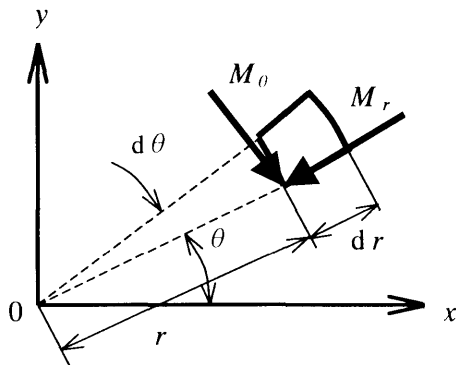


図2 座標系と曲げモーメント

のようになる。簡単のために

$$\begin{pmatrix} u(r, \theta, t) \\ u_r(r, \theta, t) \\ u_\theta(r, \theta, t) \end{pmatrix} = \mathbf{u}(r, \theta, t) \quad \begin{pmatrix} f(\xi, \zeta, t) \\ M_r(\xi, \zeta, t) \\ M_\theta(\xi, \zeta, t) \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\xi, \zeta, t)$$

$$\begin{pmatrix} G_{uf} & G_{ur} & G_{u\theta} \\ G_{rf} & G_{rr} & G_{r\theta} \\ G_{\theta f} & G_{\theta r} & G_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \mathbf{G}(r, \theta; \xi, \zeta)$$

$$\begin{pmatrix} \rho h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{m}$$

とおけば、ベクトルと行列を用いた運動方程式

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(r, \theta, t) = & \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathbf{G}(r, \theta; \xi, \zeta) \\
& \times \left\{ \mathbf{f}(\xi, \zeta, t) - \mathbf{m} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right\} \xi d\xi d\zeta
\end{aligned} \quad (37)$$

が得られる。ここに、 $\mathbf{G}(r, \theta; \xi, \zeta)$ は対称性を有し、

$$\mathbf{G}(\xi, \zeta; r, \theta) = \mathbf{G}^T(r, \theta; \xi, \zeta)$$

が成立する。

式(37)に対応する同次偏微積分方程式

$$\mathbf{u}(r, \theta, t) = - \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathbf{G}(r, \theta; \xi, \zeta) \mathbf{m} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \xi d\xi d\zeta \quad (38)$$

の解を

$$\mathbf{u}(r, \theta, t) = \mathbf{V}(r, \theta) \cos \omega t \quad (39)$$

とおくと、

$$\mathbf{V}(r, \theta) = \omega^2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathbf{G}(r, \theta; \xi, \zeta) \mathbf{m} \mathbf{V}(\xi, \zeta) \xi d\xi d\zeta \quad (40)$$

が得られる。これは、周辺支持円板の固有振動数と固有関数を決定する式であるが、ここでは偏微分方程式で求められる固有振動数 ω_{ni} 、正規固有関数 $V_{ni}(r, \theta)$ を用いることとする。周辺支持円板のそれらは既知であるので、具体的な形を示すことは省く。いずれにせよ、式(40)に節直径の個数を表す添え字 n と、節円の個数を表す添え字 i をつけることにより

$$\mathbf{V}_{ni}(r, \theta) = \omega_{ni}^2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathbf{G}(r, \theta; \xi, \zeta) \mathbf{m} \mathbf{V}_{ni}(\xi, \zeta) \xi d\xi d\zeta \quad (41)$$

および、重み付き正規直交の式

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \mathbf{V}_{ni}^T(\xi, \zeta) \mathbf{m} \mathbf{V}_{mj}(\xi, \zeta) \xi d\xi d\zeta = \delta_{nm} \delta_{ij} \quad (42)$$

が成り立つ。ここに、 δ_{nm} 、 δ_{ij} はクロネッカーの δ を表している。

今の \mathbf{m} の場合、 $\mathbf{V}_{ni}(r, \theta)$ の第1要素を $V_{ni}(r, \theta)$ とおけば、式(41)(42)は

$$\begin{aligned}
V_{ni}(r, \theta) = & \omega_{ni}^2 \int_0^{2\pi} \int_0^a G_{uf}(r, \theta; \xi, \zeta) \\
& \times \rho h V_{ni}(\xi, \zeta) \xi d\xi d\zeta
\end{aligned} \quad (41)'$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a V_{ni}(\xi, \zeta) V_{mj}(\xi, \zeta) \xi d\xi d\zeta = \delta_{nm} \delta_{ij} \quad (42)'$$

のようになる。

4. 周辺数点固定の周辺支持円板の場合

さてここで、固定点を円周上に限定し、その座標を $r = a$ および $\theta = \theta_k$; $k=1,2,\dots,N$ とし、固定点から円板が受ける半力を $f(a, \theta_k, t)$ (ただし u と同じ向きの力を正とする)、曲げモーメントを $M_r(a, \theta_k, t)$, $M_\theta(a, \theta_k, t)$ とすれば、固定点での拘束条件は、

$$u(a, \theta_k, t) = 0 \quad (43)$$

$$\frac{\partial u(a, \theta_k, t)}{\partial r} = 0 \quad (44)$$

$$\frac{\partial u(a, \theta_k, t)}{\partial \theta} = 0 \quad (45)$$

である。これらのうち式(43)と式(45)は、周辺支持という境界条件により満たされているので、考慮する必要はない。従って、力 $f(a, \theta_k, t)$ も曲げモーメント $M_r(a, \theta_k, t)$ ももはや考慮に入れる必要はない。

とりあえず、一般の運動方程式(37)の解を

$$\mathbf{u}(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \psi_{ni}(t) \mathbf{V}_{ni}(r, \theta) \quad (46)$$

とおくと、式(37)は

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \psi_{ni}(t) \mathbf{V}_{ni}(r, \theta) &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathbf{G}(r, \theta; \xi, \zeta) \\ &\times \left\{ \mathbf{f}(\xi, \zeta, t) - \mathbf{m} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \ddot{\psi}_{ni} \mathbf{V}_{ni}(\xi, \zeta) \right\} \xi d\xi d\zeta \end{aligned} \quad (47)$$

のようになる。ここで外力である集中反力を

$$\mathbf{f}(\xi, \zeta, t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k(t) \delta(\xi - a) \delta(\zeta - \theta_k) \quad (48)$$

と表し、式(47)の両辺に左から $r \mathbf{V}_{mj}^T(r, \theta) \mathbf{m}$ をかけて r と θ の全域にわたって積分し、式(41)(42)を利用すれば

$$\ddot{\psi}_{mj} + \omega_{mj}^2 \psi_{mj} = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k^T(t) \mathbf{V}_{mj}(a, \theta_k) a \quad (49)$$

が得られる。この式の右辺は

$$\ddot{\psi}_{mj} + \omega_{mj}^2 \psi_{mj} = \sum_{k=1}^N M_\theta(a, \theta_k, t) \frac{\partial V_{mj}(a, \theta_k)}{\partial r} a \quad (50)$$

のように書ける。

固有振動を考える場合、

$$M_\theta(a, \theta_k, t) = A_k \cos \omega t \quad (51)$$

と置くことによって、式(50)の定常周期解は

$$\psi_{mj} = \frac{1}{\omega_{mj}^2 - \omega^2} \sum_{k=1}^N \frac{\partial V_{mj}(a, \theta_k)}{\partial r} a A_k \cos \omega t \quad (52)$$

となる。こうして固定点 θ_ℓ での傾きの式(44)により

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(a, \theta_\ell, t)}{\partial r} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\omega_{mj}^2 - \omega^2} \frac{\partial V_{mj}(a, \theta_\ell)}{\partial r} \\ &\times \sum_{k=1}^N \frac{\partial V_{mj}(a, \theta_k)}{\partial r} a A_k \cos \omega t = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

$$(\ell = 1, 2, \dots, N)$$

と表される。これが時間に無関係に成立するためには

$$\sum_{k=1}^N A_k \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\omega_{mj}^2 - \omega^2} \frac{\partial V_{mj}(a, \theta_\ell)}{\partial r} \frac{\partial V_{mj}(a, \theta_k)}{\partial r} = 0 \quad (\ell = 1, 2, \dots, N) \quad (54)$$

簡単のために、これを

$$\sum_{k=1}^N b_{\ell k} A_k = 0 \quad (\ell = 1, 2, \dots, N) \quad (55)$$

$$b_{\ell k} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\omega_{mj}^2 - \omega^2} \frac{\partial V_{mj}(a, \theta_\ell)}{\partial r} \frac{\partial V_{mj}(a, \theta_k)}{\partial r}$$

とおけば、 $A_k \neq 0$ となるための必要十分条件は、連立方程式の係数行列式が 0 となること、つまり

$$\det(b_{\ell k}) = 0 \quad (56)$$

である。これが円周上の N 点で固定された周辺支持円板の振動数方程式である。方法 1 と比較してかなり簡単に誘導できることがわかる。

これによって固有振動数 ω が決まれば、それに対応する A_k の大きさの比が式(55)から決まり、固有関数が求められる。

5. 数値計算例

本報では半径 a の周辺支持円板を、いくつかの点で固定した場合の、固有振動数と固有振動モードについての計算結果を示す。数値計算は無次元のパラメータを用いて行うのがよいので、方法 2 の計算において次のような記号を定義する：

$$\frac{a}{c} \sqrt{\omega_{ni}} = \lambda_{ni}, \quad \frac{a}{c} \sqrt{\omega} = \Omega, \quad \frac{r}{a} = \bar{r}$$

固定点での正規固有関数の値 $V_{ni}(a, \theta_k)$ を無次元にして

$$a \sqrt{m} V_{ni}(a, \theta_k) = \tilde{V}_{ni}(1, \theta_k)$$

とおくと、振動数方程式(54)は、

$$\det \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{mj}^4 - \Omega^4} \frac{\partial \tilde{V}_{mj}(1, \theta_\ell)}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \tilde{V}_{mj}(1, \theta_k)}{\partial \bar{r}} \right) = 0 \quad (57)$$

のようになる。これを簡単のために

$$\det(b_{\ell k}) = 0 \quad (58)$$

とおく。

以上の振動数方程式より無次元固有振動数 Ω が求まれば、固有振動モードを求めることができる。以下に方法 1、方法 2 の両者の数値計算結果を示す。

5.1 方法 1 の結果

振動数方程式(32)の係数行列式の要素 b_{ij} は無限和で表されていることから、有限項の和で近似計算し

ている。有限項の和で近似計算することで、固有振動数の値は項数によって変化する。そこで次の様に

$$b_{ij} = \sum_{n=0}^L \cos n \frac{2\pi(j-i)}{N} \{-a_n J_{n+1}(\lambda) + c_n I_{n+1}(\lambda)\}$$

b_{ij} の項数を L として、3点固定の場合の固有振動数と項数 L との関係を表1に示す。表中の L は b_{ij} の項数であり、 mn はモードの次数を表している。また固有振動数の値は小数第5位で四捨五入したものである。この表から、項数が多くなるほど固有振動数の値が小さくなっており、項数が多いほど厳密解に近い固有振動数の値が得られていると考えられる。この表からわかるように、固有振動数の値は十分に収束していないが、計算では項数 L を50とした。

次に、3点固定の場合を例に振動数方程式(32)の計算結果を図3に示す。図の縦軸は $\det(b_{ij})$ の値、横軸は固有振動数 λ である。また、実線が振動数方程式の計算結果であり、破線は周辺支持円板の固有振動数を表している。図において $\det(b_{ij})=0$ となる λ が数点で固定された周辺支持円板の固有振動数である。

また3～6点で固定された場合の固有振動数の値を表2に示す。表中の N は固定点数、 mn はモードの次数を表している。

表1 固有振動数の収束状況
($N=3$)

L	mn			
	1	2	4	6
10	2.5893	3.9360	5.2530	5.5784
20	2.5225	3.8918	5.2026	5.5549
30	2.4848	3.8754	5.1854	5.5416
40	2.4685	3.8638	5.1738	5.5358
50	2.4569	3.8561	5.1662	5.5317
60	2.4454	3.8511	5.1614	5.5277

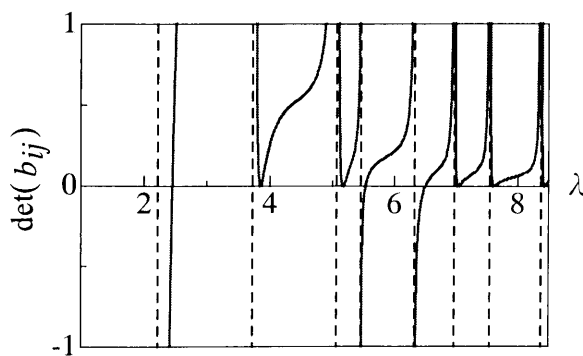


図3 $\det(b_{ij})$ と λ の関係
($N=3, L=50$)

これらの固有振動数は、小数第5位で四捨五入したものであるが、数値計算の際に、小数第5位以下の数値のわずかな違いで固有振動モードが大きく変化するものが見られた。例えば3点固定で2次と3次 ($mn=2$ と $mn=3$) の固有振動数は表中では同一の3.8561としているが、数値計算の際、2次では $\lambda_2=3.8560607961$ とし、2次では $\lambda_3=3.8560607962$ としている。

こうして求められた固有振動数を連立方程式(31)に代入し、方程式の解である M_i の比を求め、固有振動数と M_i の比より固有振動モードが求まる。以下に3～6点固定の固有振動モードを示す。図においてかっこ内の数字はモードの次数、かっこ横の数値は固有振動数、円周上の○は固定点、固定点付近の数値は M_i の比を表しており、●は節の位置を表している。

図4は、周辺を等間隔に3点で固定した周辺支持円板の固有振動数 λ と固有振動モードを表している。

図5は、周辺を等間隔に4点で固定した周辺支持円板の固有振動数 λ と固有振動モードを表している。

図6は、周辺を等間隔に5点で固定した周辺支持円板の固有振動数 λ と固有振動モードを表している。

図7は、周辺を等間隔に6点で固定した周辺支持円板の固有振動数 λ と固有振動モードを表している。

これら固有振動モードの結果から、節直径を有する振動モードにおいては、これについて非対称となっているがこれ以外の振動モードにおいては対称となっている。また、固定点の増加に伴い振動モードにおける節直径と節円のゆがみがなくなり、周辺固定円板の固有振動モードに近づいている様子がうかがえる。このことから固定点が少ない時は、固定点の影響が大きいと考えられる。

表2 固有振動数 (λ)

mn	N			
	3	4	5	6
1	2.4569	2.5247	2.5820	2.6388
2	3.8561	3.9074	3.9541	3.9966
3	3.8561	3.9074	3.9541	3.9966
4	5.1662	5.3270	5.2145	5.2568
5	5.1662	5.5727	5.2145	5.2568
6	5.5317	6.4171	5.6073	5.6439
7	6.5006	6.4171	6.4705	6.6536
8	7.0285	7.0767	6.4705	7.1085
9	7.0285	7.0767	7.0652	7.1085
10	7.6154	7.7221	7.0652	7.6663
11	7.6154	8.5352	7.6800	7.6663
12	8.4319	8.7090	7.6800	8.5237

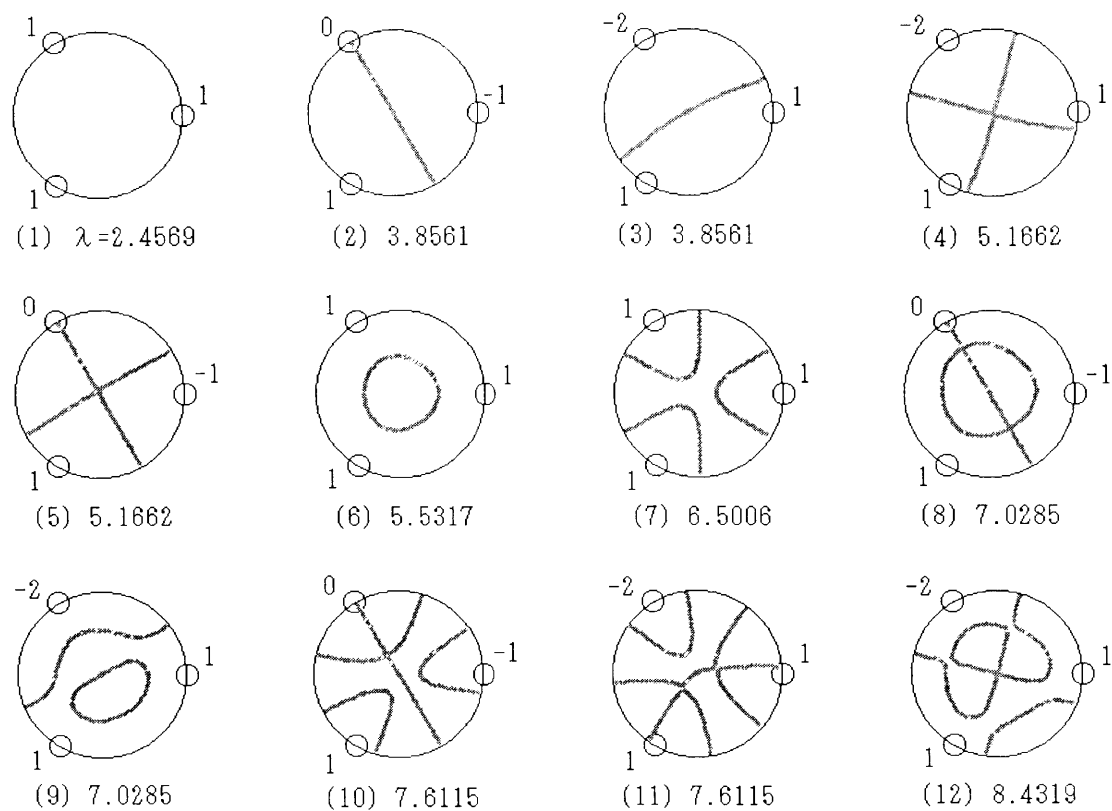


図4 周辺を等間隔に3点で固定した周辺支持円板の固有振動数 λ と固有振動モード

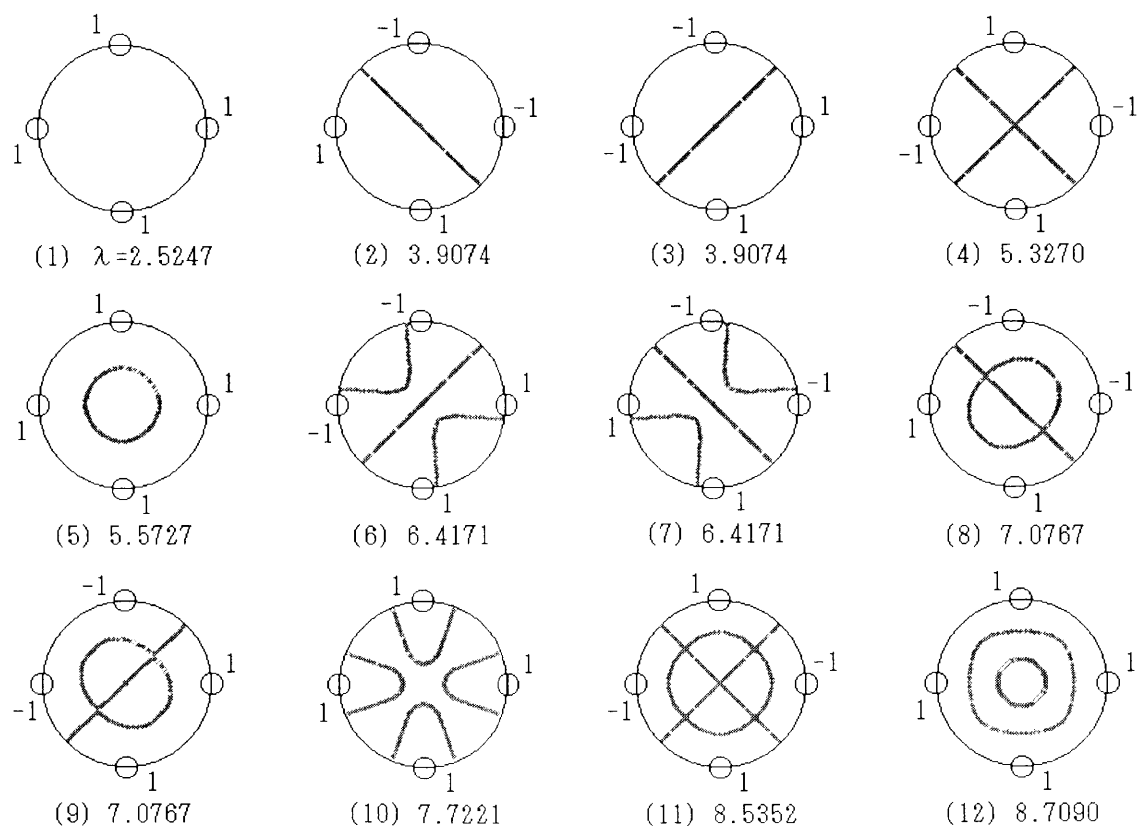


図5 周辺を等間隔に4点で固定した周辺支持円板の固有振動数 λ と固有振動モード

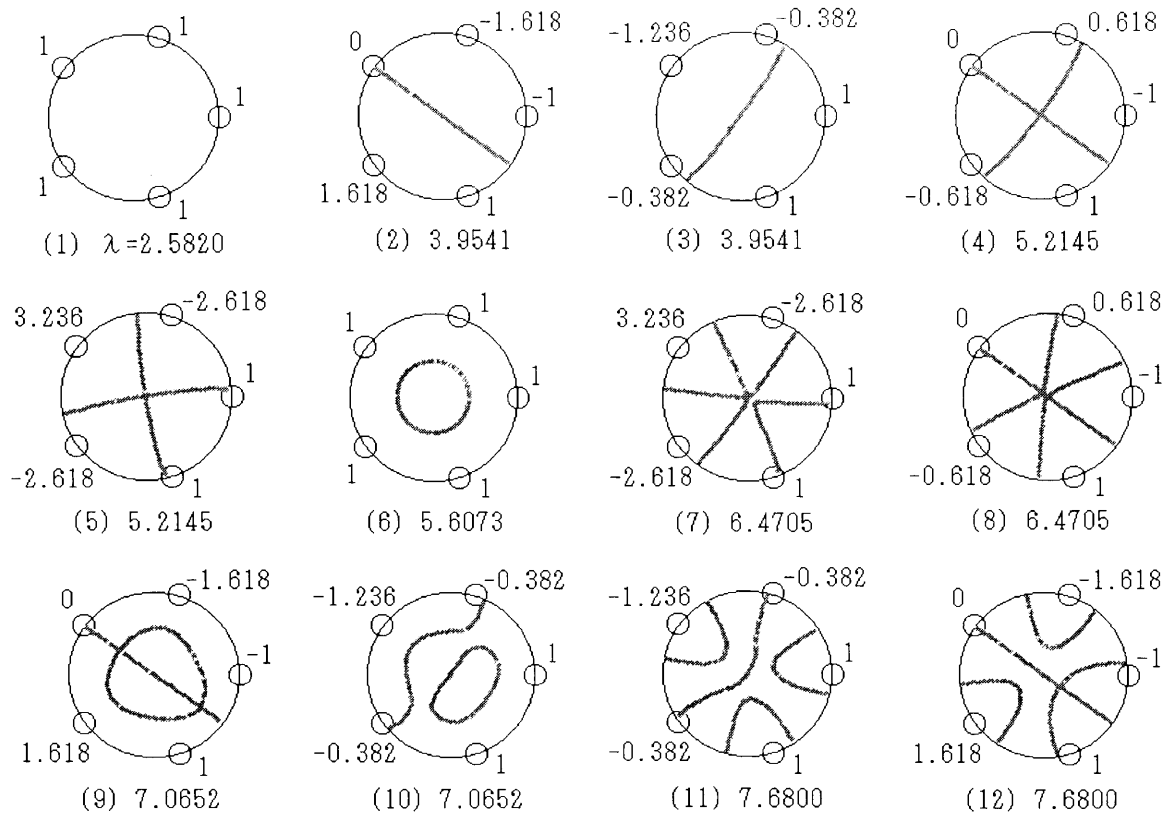


図6 周辺を等間隔に5点で固定した周辺支持円板の固有振動数 λ と固有振動モード

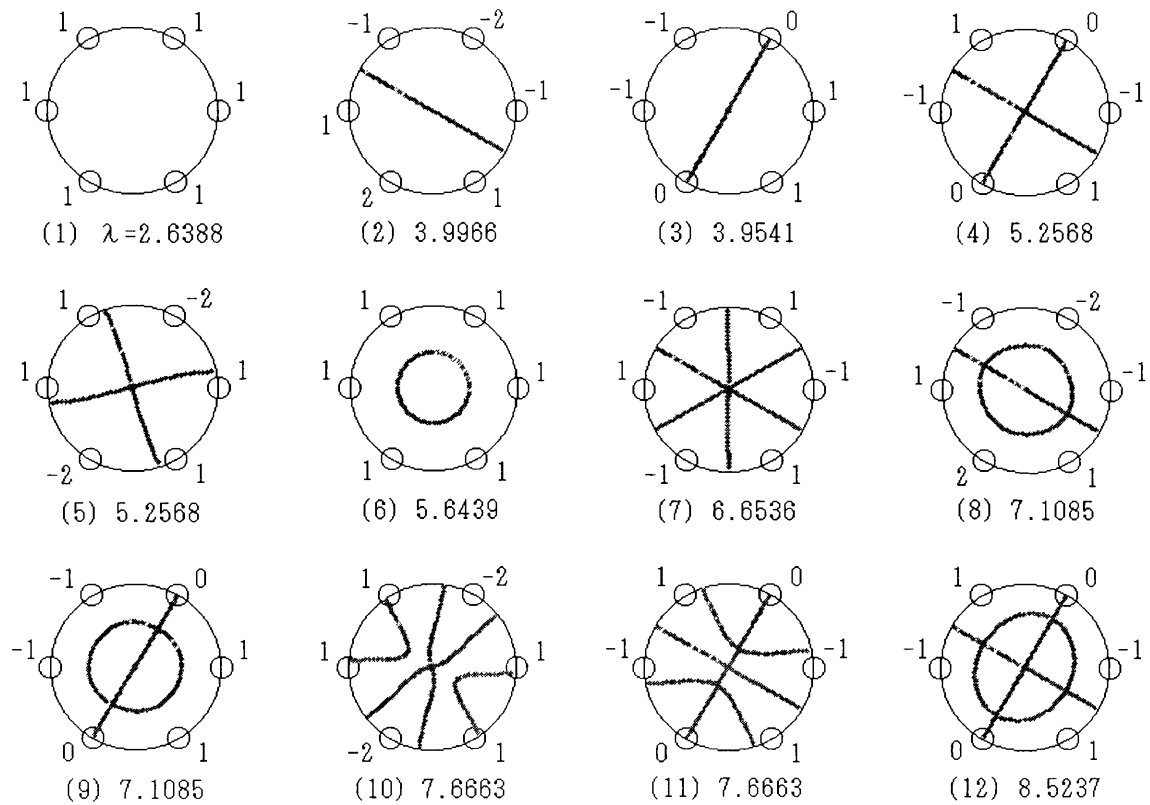


図7 周辺を等間隔に6点で固定した周辺支持円板の固有振動数 λ と固有振動モード

5.2 方法2の結果

方法1と同様、振動数方程式(58)の係数 b_{ik} は無限和であり、数値計算では、周辺支持円板の固有振動数は無限には求められないので、有限項の和で近似している。

表3は、等間隔に3点で固定された円板の第7次固有振動数が、計算に使用した m, j の値によってどのように変化するかを示したものであり、できる限り多くの m, j を考慮に入れなければ固有振動数が収束しないことがわかる。ここでは小数第5位で四捨五入した値を示している。

本報では、固有振動数が十分に収束しているとは言えないが、周辺支持円板の節直径の個数 m が18まで、節円の個数 j が7までの合計303個の固有振動モード(1組の (m, j) に $\sin m\theta$ と $\cos m\theta$ の2種類の固有振動モードが存在する)を使用して計算している。従って、現実問題として第2の方法は、振動数方程式の誘導が簡単ではあるものの、予め準備すべき周辺支持円板の固有振動数と固有振動モードが余りにも多すぎ、しかも収束性があまり良いとは言えない。

図8は、式(58)の解を求めるための参考として描いた3点固定($N=3$)の場合の左辺の $\det(b_{ik})$ と Ω との関係を表している。この図において $\det(b_{ik})=0$ となる Ω が数点で固定された周辺支持円板の固有振動数である。

表3 3点固定の場合の第7次固有振動数の収束状況

$m \backslash j$	4	5	6	7
6 ~ 8	6.9189	6.8854	6.8622	6.8451
9 ~ 11	6.8262	6.7962	6.7753	6.7602
12 ~ 14	6.7775	6.7492	6.7294	6.7150
15 ~ 17	6.7471	6.7198	6.7006	6.6866
18	6.7262	6.6996	6.6808	6.6670

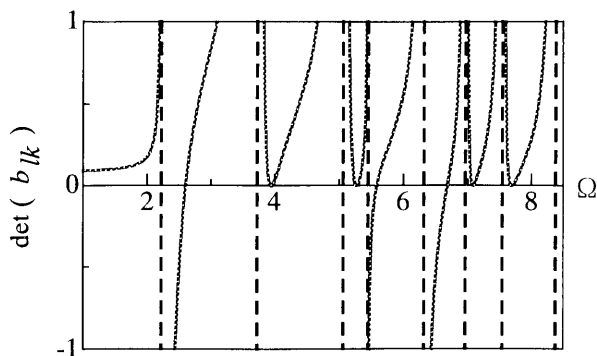


図8 $\det(b_{ik})$ と Ω の関係
($N=3, m=18, j=7$)

また3~6点で固定された場合の固有振動数の値を表4に示す。表中の N は固定点数、 mn はモードの次数を表している。これらの固有振動数は、小数第5位で四捨五入したものであるが、方法1と同様数値計算の際に、小数第5位以下での数値のわずかな違いで固有振動モードが大きく変化するものが見られた。例えば3点固定で2次と3次($mn=2$ と $mn=3$)の固有振動数は表中では同一の3.9265としているが、数値計算の際、2次では $\Omega_2=3.92646739$ とし、2次では $\Omega_3=3.92647028$ としている。

図9は、周辺を等間隔に3点で固定された円板の固有振動数 Ω と固有振動モードを表している。●は節の位置を表し、○は固定点を表している。 Ω は小数第5位で四捨五入した値を示しているが、図中の(2)と(3)や(4)と(5)のような場合は、小数第8位まで区別して計算している。固定点付近の数値は、式(55)より求めたモーメント振幅 A_k の比を表しており、これらより振動の様子が対称か非対称かがわかる。例えば、図の(2)(5)(8)(10)および(12)は節直径が存在するため、固有振動の様子が非対称となり、これら以外はすべて対称になっている。

図10は、周辺を等間隔に4点で固定した円板の固有振動モードを表している。

図11は、周辺を等間隔に5点で固定した円板の固有振動モードを表している。

図12は、周辺を等間隔に6点で固定した円板の固有振動モードを表している。

方法1の固有振動モードの結果と同じく、固有振動数の僅かな違いでモードが大きく変化するものが見られる。これは縮退と考えられる。

表4 固有振動数 (Ω)

mn	N			
	3	4	5	6
1	2.5879	2.6953	2.7847	2.8372
2	3.9265	4.0144	4.0949	4.1637
3	3.9265	4.0144	4.0949	4.1637
4	5.2523	5.5242	5.3058	5.4013
5	5.2523	5.6759	5.3058	5.4013
6	5.5834	6.4783	5.7576	5.8133
7	6.6670	6.4783	6.6067	6.9362
8	7.0757	7.2026	6.6067	7.2392
9	7.0757	7.2026	7.1262	7.2392
10	7.6808	7.8778	7.1262	7.7601
11	7.6808	8.6773	7.8524	7.7601
12	8.4769	8.8509	7.8524	8.7243

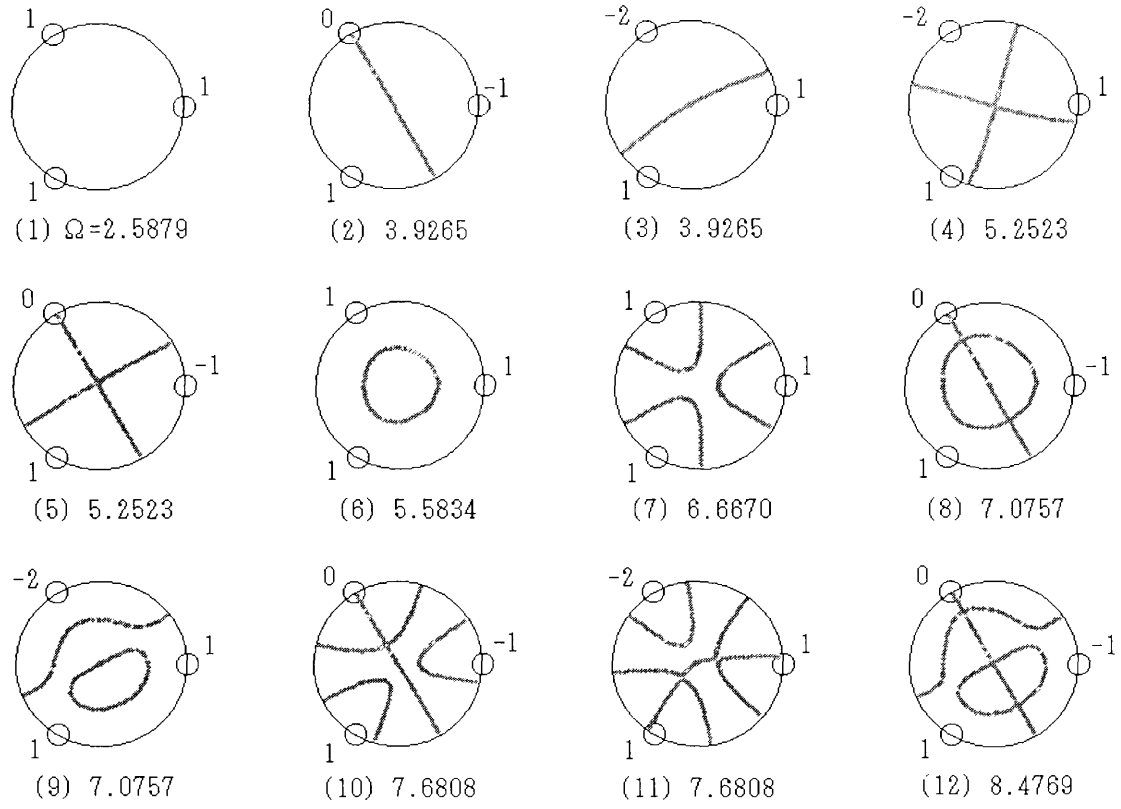


図9 周辺を等間隔に3点で固定した周辺支持円板の固有振動数 Ω と固有振動モード

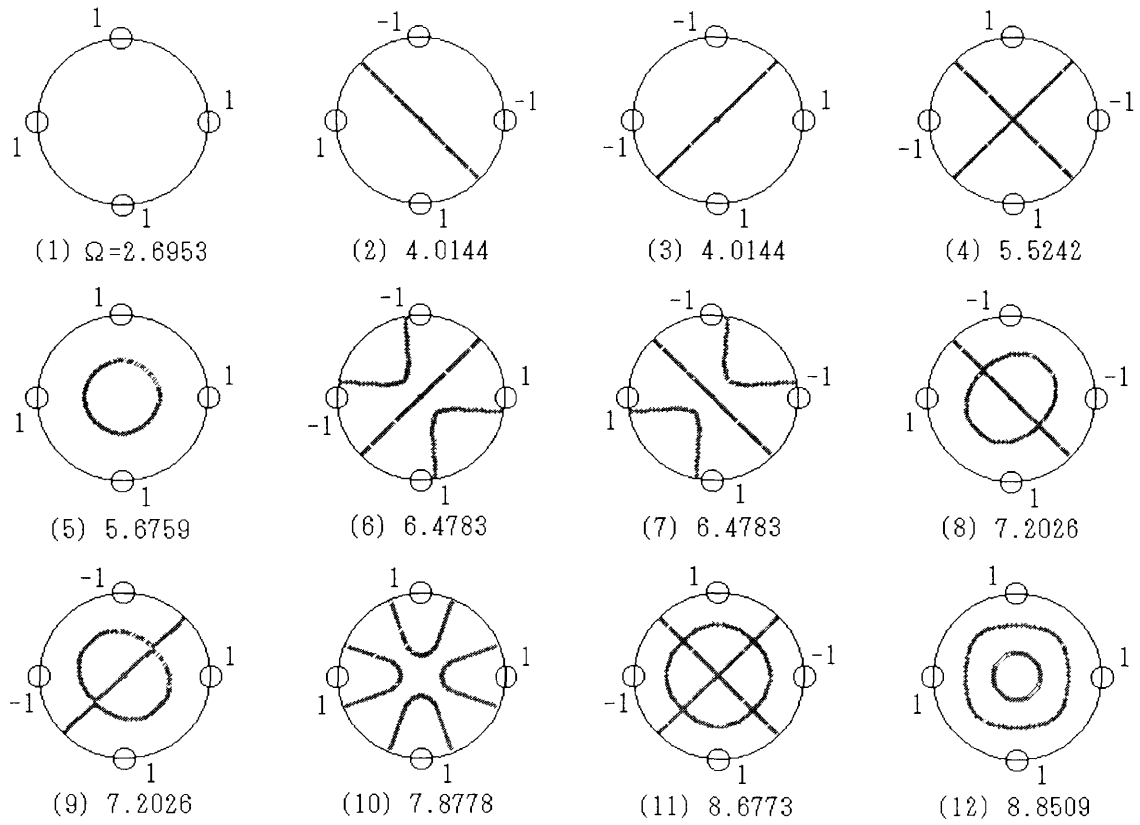


図10 周辺を等間隔に4点で固定した周辺支持円板の固有振動数 Ω と固有振動モード

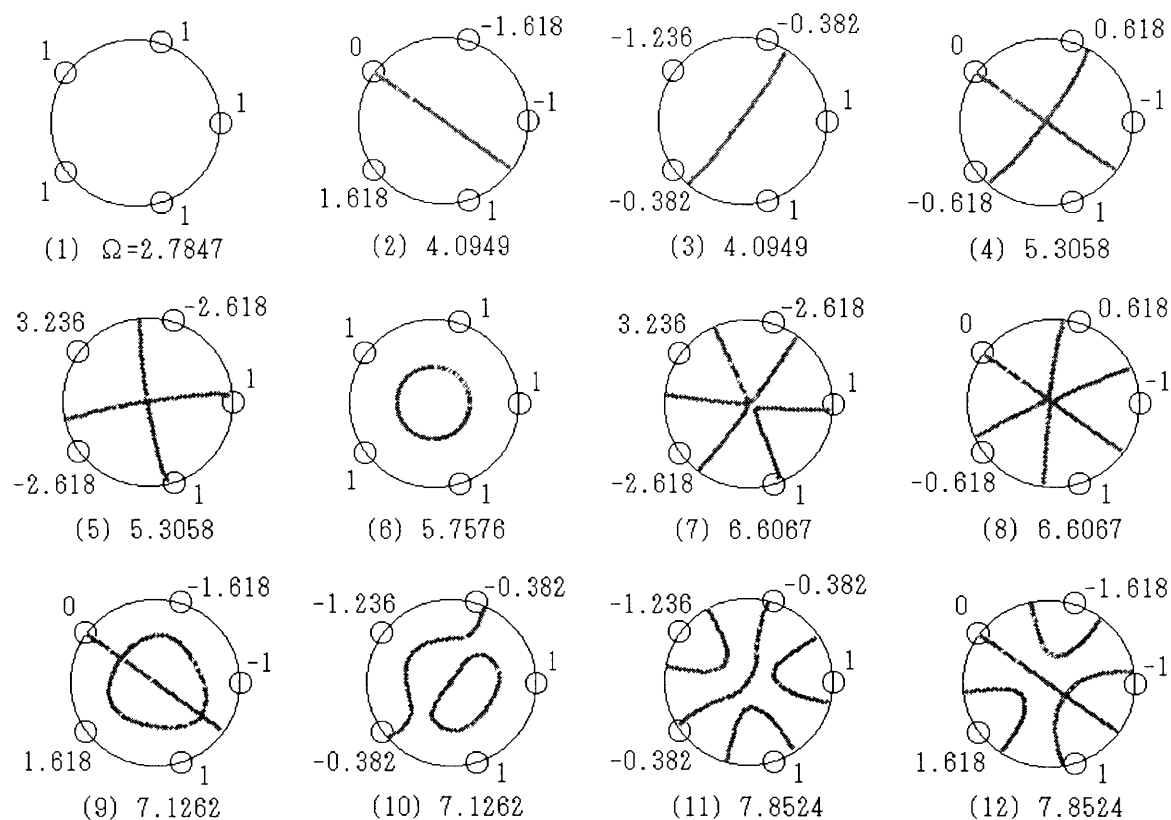


図 1.1 周辺を等間隔に 5 点で固定した周辺支持円板の固有振動数 Ω と固有振動モード

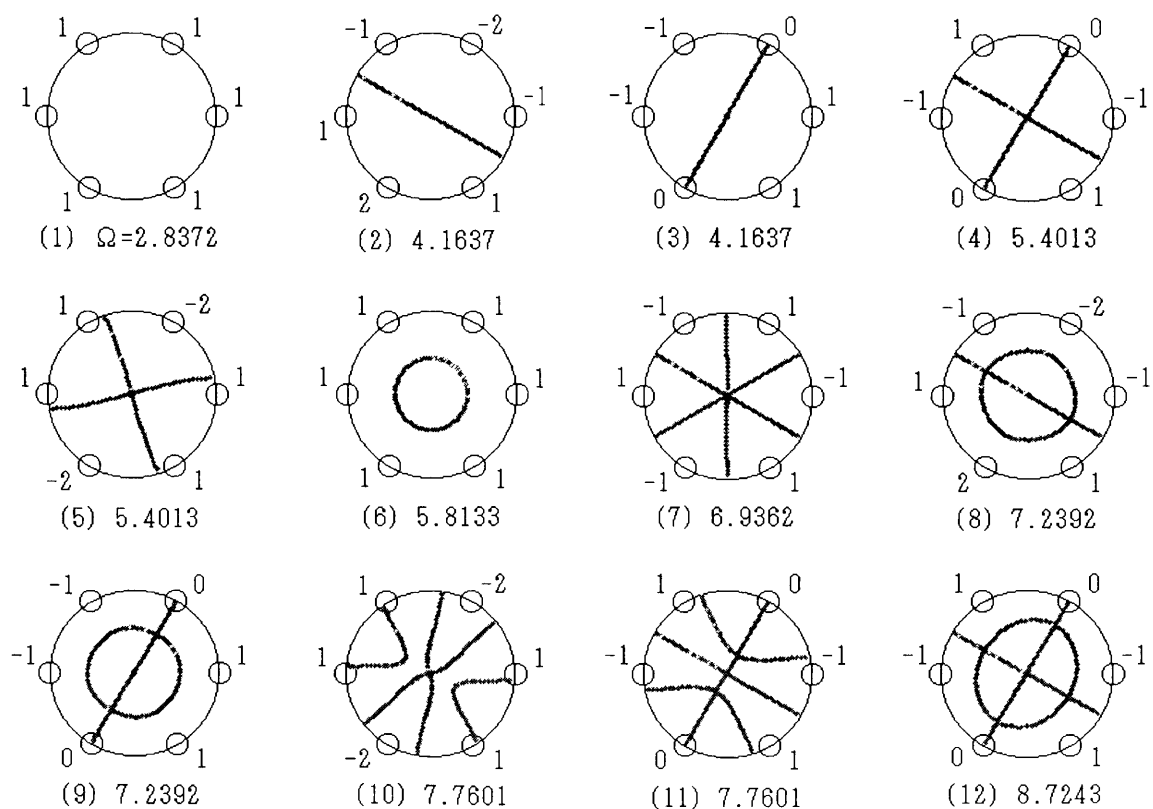


図 1.2 周辺を等間隔に 6 点で固定した周辺支持円板の固有振動数 Ω と固有振動モード

ここで方法1と方法2から得られた固有振動数の値を比較してみる。3点固定の場合の両方法で得られた固有振動数を表5に示す。表中の mn はモードの次数、 N は固定点数を表しており、 λ および Ω は固有振動数である。この結果から方法1の固有振動数(λ)の値が小さいことがわかる。先ほどの固有振動数の収束状況を示した表1および表3から、項数を多くするほど固有振動数の値が小さくなり、厳密解に近い値が得られていることを考えると、方法1が方法2より高精度であるといえる。

方法1で得られた結果から、固定点の個数 N と固有振動数 λ の関係を図13に示す。 $N=0$ は周辺支持円板を表しており、 $N=\infty$ は周辺固定円板を表している。図中の (i,j) なる形式の数字のうち、 i は節直径の個数を表し、 j は節円の個数を表している。この図より、節直径が0の場合の固有振動数は固定点の増加に伴い単調に増加していく。一方節直径を有するモードの固有振動数は固定点の増加に伴い必ずしも単調増加とならないことがうかがえる。

表5 固有振動数の比較

mn	$N=3$	
	方法1 λ	方法2 Ω
1	2.4569	2.5879
2	3.8561	3.9265
4	5.1662	5.2523
6	5.5317	5.5834
7	6.5006	6.6670
8	7.0285	7.0757
10	7.6154	7.6808
12	8.4319	8.4769

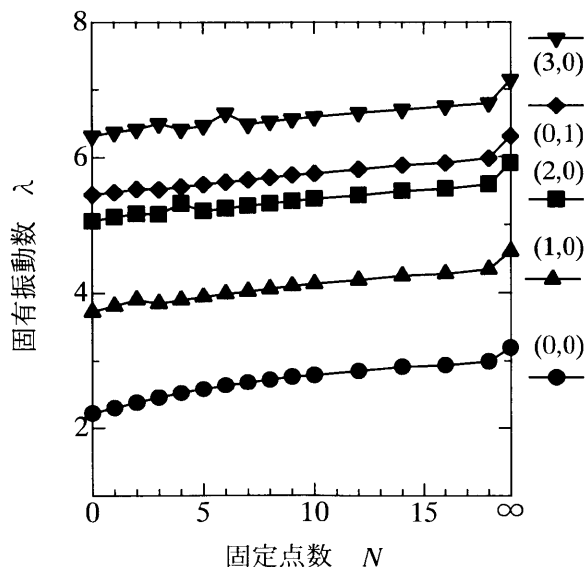


図13 固定点数 N と固有振動数 λ の関係

6. 結論

円周上に数個の固定点がある周辺支持円板の固有振動数と正規固有関数を求める方法を2種類示した。その結果、次のことがわかった。

- (1) 第1の偏微分方程式に境界条件を当てはめて振動数方程式を誘導する方法は、極めて複雑ではあるが、数値計算自体は第2の方法と比較すると極めて簡単で、高精度の解をえることができる。
- (2) 第2の方法では、比較的簡単に振動数方程式が得られる。しかし、予め多数の周辺支持円板の固有振動数と固有振動モードを用意しておかなければ、得られる固有振動数 Ω の精度は良くならない。本論文では節直径数18、節円数7の合計303個のモードを使用した。まだ十分に収束しているとは言い難い。
- (3) 固定点の個数 N と固有振動数 Ω の関係を求めたところ、 N の増加とともに Ω は必ずしも単調に増加していない。

参考文献

- [1]Carlin,J.F.et al,J.of Engineering for Industry,Feb.(1975) 37
- [2]Sato,S.・Matsuhisa,H.,Bull.JSME,21-160(1978-10) 1475
- [3]江・長南,機論,54-507,C(1988) 2669
- [4]小寺,機論,56-522,C (1990-2) 257
- [5]Yano,S.・Kotera,T.,Archive of Applied Mechanics, 61 (1991) 373
- [6]Greenberg , H.J. , IEEE,14-5 (1978) 336
- [7]Benson,R.C.・Bogy,D.B.,J.of Applied Mechanics, 45-Sept (1978) 636
- [8]荒井,機論,49-443 (昭 58-7) 1161
- [9]小野・他3名,機論,51-466,C (昭 60-6) 1389
- [10]小野・他2名,機論,52-473,C (昭 61-1) 326
- [11]小野・前野,機論,52-484,C (昭 61-12) 3100
- [12]保坂・西田,機論,52-474,C (昭 61-2) 490
- [13]Cobe,K.A.・Benson,R.C.,J.of Applied Mechanics, 55-June (1988) 453
- [14]Ferguson,N.S.・White,R.G.,J.of Sound and Vibration, 131-3 (1988) 497
- [15]小寺,機論,55-516,C (1989-8) 1927
- [16]Yano,S.&Kotera,T.,Archive of Applied Mechanics, 61 (1991) 110
- [17]Yang,S-M.,J.of Vibration and Acoustics,115-April (1993) 159

- [18]Chen,J.S.&Bogy,D.B.,J.of Applied Mechanics,
60-June (1993) 470
- [19]Weisensel,G.N.&Schlack,A.L.,J.of Applied
Mechanics, 60-June (1993) 470
- [20]齊藤・中沢,機論,32-235 (昭 41-3) 457
- [21]中沢,機論,33-256 (昭 41-3) 1951
- [22]Chi,C.,AIAA J.,10-2 (1972) 142
- [23]Irie,T.&Yamada,G.,Bull.JSME,21-161 (1978-11)
1602
- [24]木村・他 2 名,機講論,987-1, (1998-3),141

付録 1. δ 関数のフーリエ級数展開

半径 $r = a$ の円周上 ($x = 0 \sim 2\pi a$) でディラックの δ 関数をフーリエ級数に展開しようというのだから、まず

$$\delta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{nx}{a}\right) \quad (\text{付 1})$$

とおく. この両辺に $\cos(mx/a)$ をかけて, x について $-\pi a$ から πa まで積分すると,

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_{-\pi a}^{\pi a} \cos\left(\frac{mx}{a}\right) \delta(x) dx = 1 \\ \text{右辺} &= a_m \int_{-\pi a}^{\pi a} \cos^2\left(\frac{mx}{a}\right) dx = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 m \theta d\theta \\ &= \begin{cases} a_m a \pi & : m \geq 1 \\ 2a_m a \pi & : m = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

よって

$$a_m = \begin{cases} 1/a\pi & : m \geq 1 \\ 1/(2a\pi) & : m = 0 \end{cases} \quad (\text{付 2})$$

がえられる. こうして

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi a} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{nx}{a}\right) \right\} \quad (\text{付 3})$$

となる.

半径 $r = a$ の円周上 ($x = 0 \sim 2\pi a$) を N 等分した点に集中曲げモーメントがあって, それを表すディラックの δ 関数をフーリエ級数に展開するものとする.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{N-1} M_i \cos \omega t \delta\left(x - \frac{2\pi i}{N} a\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{nx}{a}\right) + b_n \sin\left(\frac{nx}{a}\right) \right\} \end{aligned}$$

とおく. この両辺に $\cos(mx/a)$ をかけて, x について 0 から $2\pi a$ まで積分すると,

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_0^{2\pi a} \cos\left(\frac{mx}{a}\right) \sum_{i=0}^{N-1} M_i \cos \omega t \delta\left(x - \frac{2\pi i}{N} a\right) dx \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} M_i \cos \omega t \cos m \frac{2\pi i}{N} \\ \text{右辺} &= a_m \int_{-\pi a}^{\pi a} \cos^2\left(\frac{mx}{a}\right) dx = a_m a \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 m \theta d\theta \\ &= \begin{cases} a_m a \pi & : m \geq 1 \\ 2a_m a \pi & : m = 0 \end{cases} \quad \left(\theta = \frac{x}{a}\right) \end{aligned}$$

よって

$$a_m = \begin{cases} \frac{1}{a\pi} \sum_{i=0}^{N-1} M_i \cos \omega t \cos m \frac{2\pi i}{N} & : m \geq 1 \\ \frac{1}{2\pi a} \sum_{i=0}^{N-1} M_i \cos \omega t & : m = 0 \end{cases}$$

が得られる.

同様にして

$$b_m = \frac{1}{a\pi} \sum_{i=0}^{N-1} M_i \cos \omega t \sin m \frac{2\pi i}{N}$$

こうして

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{N-1} M_i \cos \omega t \delta\left(x - \frac{2\pi i}{N} a\right) \\ &= \frac{1}{2\pi a} \sum_{i=0}^{N-1} M_i \cos \omega t \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \\ &\quad \times \left\{ \cos n \frac{2\pi i}{N} \cos\left(\frac{nx}{a}\right) + \sin n \frac{2\pi i}{N} \sin\left(\frac{nx}{a}\right) \right\} \\ \epsilon_0 &= 0, \quad \epsilon_n = 2 \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

となる.

付録 2. 周辺支持円板の固有振動数と固有関数

周辺支持円板の固有関数は次式で与えられる.

$$V_{ni}(z, \theta) = A_{ni} \{ J_n(z) - \beta_{ni} I_n(z) \} \begin{cases} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{cases}$$

ただし,

$$\beta_{ni} = \frac{J_n(\lambda_{ni})}{I_n(\lambda_{ni})}, \quad z = \frac{r}{c} \sqrt{\omega}$$

A_{ni} : 正規化のための係数

固有値 λ_{ni} を決定する特性方程式は次式のようになる.

$$(1-\nu) \{ J_n(\lambda) I_{n+1}(\lambda) + J_{n+1}(\lambda) I_n(\lambda) \} - 2\lambda J_n(\lambda) I_n(\lambda) = 0$$

ただし,

$$\lambda = \frac{a}{c} \sqrt{\omega}$$